第 4 节 同构（★★★★）

强化训练

1．（★★★）已知 $x,y\in\mathbf{R}$，若 $x+y>\cos x-\cos y$，则下面式子一定成立的是（　　）

（A）$x+y<0$　　（B）$x+y>0$　　（C）$x-y>0$　　（D）$x-y<0$

答案：B

解析：先将变量 x 和 y 分离到两侧，$x+y>\cos x-\cos y\Leftrightarrow x-\cos x>-y-\cos y$，

这个式子左右两侧结构类似，但不完全相同，可通过 $\cos y=\cos(-y)$ 来调整为同构形式，

因为 $\cos y=\cos(-y)$，所以 $x-\cos x>-y-\cos(-y)$，

设 $f(x)=x-\cos x(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=1+\sin x\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

而 $x-\cos x>-y-\cos(-y)$ 即为 $f(x)>f(-y)$，所以 $x>-y$，故 $x+y>0$.

2．（2022·南平模拟·★★★）对任意的 $x_1,x_2\in(1,3]$，当 $x_1<x_2$ 时，$x_1-x_2-\dfrac{a}{3}\ln\dfrac{x_1}{x_2}>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[3,+\infty)$　　（B）$(3,+\infty)$　　（C）$[9,+\infty)$　　（D）$(9,+\infty)$

答案：C

解析：先将不等式 $x_1-x_2-\dfrac{a}{3}\ln\dfrac{x_1}{x_2}>0$ 中的 x_1，x_2 分离到不等号的两侧，

$x_1-x_2-\dfrac{a}{3}\ln\dfrac{x_1}{x_2}>0\Leftrightarrow x_1-x_2-\dfrac{a}{3}(\ln x_1-\ln x_2)>0\Leftrightarrow x_1-\dfrac{a}{3}\ln x_1>x_2-\dfrac{a}{3}\ln x_2$，这样就同构了，可构造函数分析，

设 $f(x)=x-\dfrac{a}{3}\ln x$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，所以问题等价于 $f(x)$ 在 $(1,3]$ 上↘，

从而 $f'(x)=1-\dfrac{a}{3x}\leq 0$ 在 $(1,3]$ 上恒成立，故 $a\geq 3x$，因为当 $x\in(1,3]$ 时，$(3x)_{\max}=9$，所以 $a\geq 9$.

3．（★★★★）已知实数 a，b 满足 $3^a+a=7$，$\log_3\sqrt[3]{3b+1}+b=2$，则 $a+3b=$______.

答案：6

解析：已知的两个方程都无法解出 a 和 b，考虑同构，$\log_3\sqrt[3]{3b+1}+b=2$ 这个式子较复杂，故尝试化简，

$\log_3\sqrt[3]{3b+1}+b=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\log_3(3b+1)+b=2\Leftrightarrow\log_3(3b+1)+3b=6$，里面是 $3b+1$，于是把外面的 $3b$ 也加 1，

所以 $\log_3(3b+1)+(3b+1)=7$，与 $3^a+a=7$ 对比发现这就是 3^x+x 与 $\log_3 x+x$ 之间的同构，属基础同构模型，

因为 $3^a+a=7$，所以 $3^a+\log_3 3^a=7$，这个式子和 $\log_3(3b+1)+(3b+1)=7$ 同构，可构造函数分析，

设 $f(x)=\log_3 x+x(x>0)$，则 $f(3^a)=f(3b+1)=7$，注意到 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，所以 $3^a=3b+1$，

代入 $3^a+a=7$ 可得 $(3b+1)+a=7$，故 $a+3b=6$.

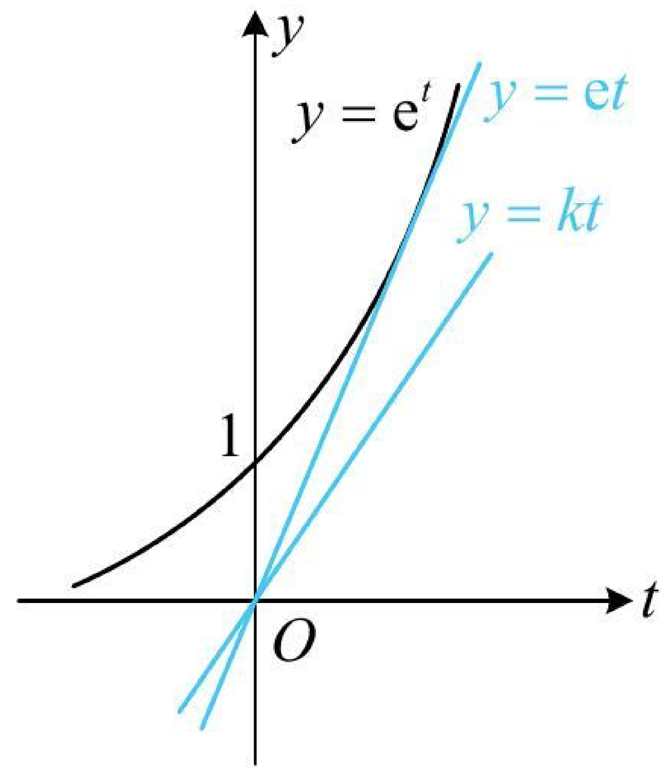
4．（★★★★）已知函数 $f(x)=xe^{x+1}$， $g(x)=k(\ln x+x+1)$，其中 $k>0$，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，若 $h(x)\geq 0$ 恒成立，则 k 的取值范围是_____.

答案： $(0,\mathrm{e}]$

解析：由题意， $h(x)\geq 0\Leftrightarrow xe^{x+1}-k(\ln x+x+1)\geq 0$，若把 xe^{x+1} 调整为 $e^{\ln x+x+1}$，则可将 $\ln x+x+1$ 整体换元，

所以 $e^{\ln x+x+1}-k(\ln x+x+1)\geq 0$，设 $t=\ln x+x+1$，则 $t\in\mathbf{R}$，且 $e^t-kt\geq 0$，所以 $e^t\geq kt$，

如图，注意到 $y=e^t$ 过原点的切线为 $y=\mathrm{e}t$，所以当且仅当 $0<k\leq \mathrm{e}$ 时， $e^t\geq kt$ 恒成立.



5．（2022·广州三模·★★★★）若对任意的 $x>0$，都有 $x^x-ax\ln x\geq 0$，则 a 的取值范围为（　　）

（A）$[0,\mathrm{e}]$　　（B）$[-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{\mathrm{e}}},\mathrm{e}]$　　（C）$(-\infty,-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}]\cup[\mathrm{e},+\infty)$　　（D）$(-\infty,\mathrm{e}]$

答案：B

解析： x^x 的底数和指数都有 x，不易直接分析，得变形，取对数就能把指数部分的 x 拿下来，

因为 $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$，所以 $x^x-ax\ln x\geq 0$ 即为 $e^{x\ln x}-ax\ln x\geq 0$，含 x 的部分为 $x\ln x$ 的整体结构，故换元，

令 $t=x\ln x$，则 $e^{x\ln x}-ax\ln x\geq 0$ 即为 $e^t-at\geq 0$，既然换了元，就得研究新元的范围，可求导分析，

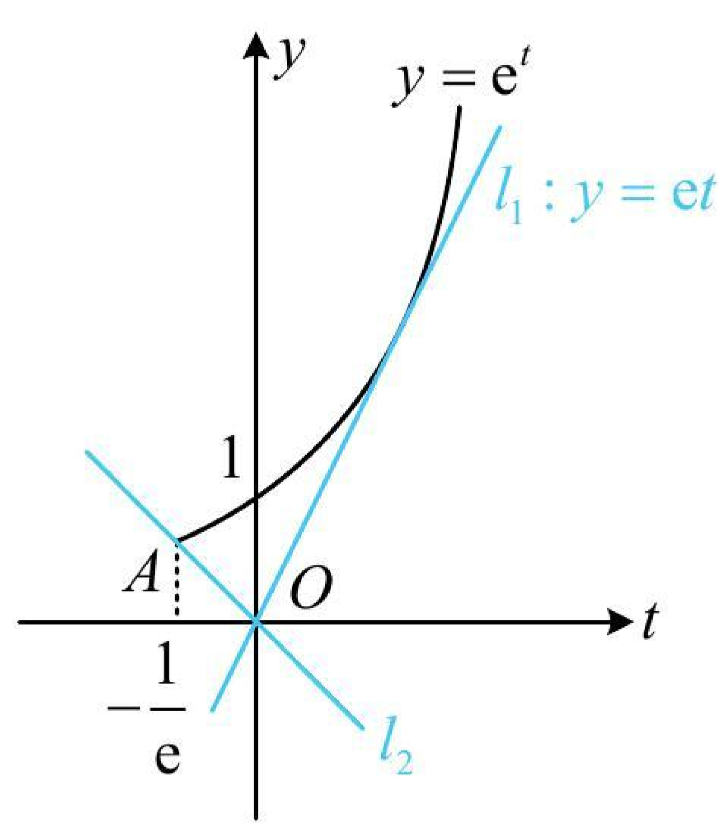
因为 $t'=\ln x+1$，所以 $t'>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\mathrm{e}}$， $t'<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

从而 $t=x\ln x$ 在 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$ 上↘，在 $(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 上单调递增，故当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，t 取得最小值 $-\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $t\geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，

因为 $e^t-at\geq 0$，所以 $e^t\geq at$，为了研究这一不等式，可作图分析，

如图，要使 $e^t\geq at$ 在 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 上恒成立，直线 $y=at$ 可从切线 l_1 绕原点顺时针旋转至 l_2，

切线 l_1 的斜率为 e，直线 l_2 过原点和点 $A(-\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}})$，其斜率为 $\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}}{-\frac{1}{\mathrm{e}}}=-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}$，所以 a 的取值范围为 $[-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{\mathrm{e}}},\mathrm{e}]$.



【反思】高中阶段，看到 $x^x(x>0)$ 这一结构，常通过取对数将指数部分的 x 拿下来，可将其调整为 $e^{x\ln x}$.

6．（2022·广州模拟·★★★★）若不等式 $\ln(mx+1)-x-1>mx-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则正实数 m 的最大值为_____.

答案：1

解析：左边是 $\ln(mx+1)$，所以将右侧的 mx 移至左侧，凑成 $\ln(mx+1)-(mx+1)$ 这一典型结构，

$\ln(mx+1)-x-1>mx-e^x \Leftrightarrow \ln(mx+1)-(mx+1)>x-e^x$，接下来就是 $\ln x-x$ 与 $x-e^x$ 的同构了，

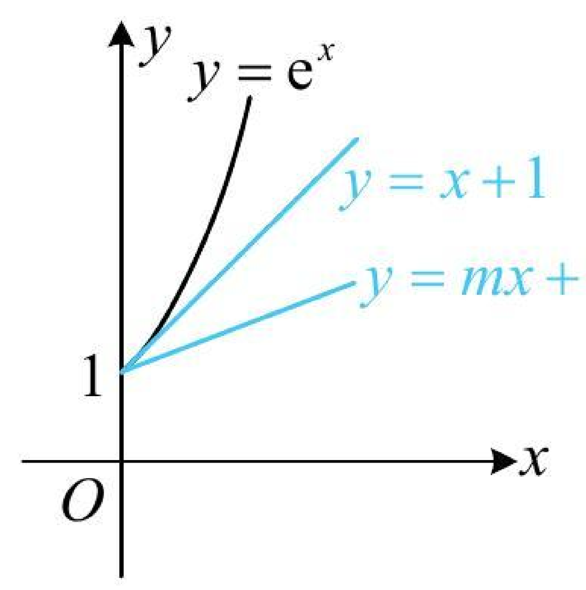
$\ln(mx+1)-(mx+1)>x-e^x \Leftrightarrow \ln(mx+1)-(mx+1)>\ln e^x-e^x$ ①，

设 $f(x)=\ln x-x(x>1)$，则不等式①即为 $f(mx+1)>f(e^x)$，因为 $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上↘，

因为 $m>0$，$x>0$，所以 $mx+1>1$，$e^x>1$，故 $f(mx+1)>f(e^x)\Leftrightarrow mx+1<e^x$，此不等式画图分析最方便，

如图，注意到曲线 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线为 $y=x+1$，

所以当且仅当 $0<m\le 1$ 时，$mx+1<e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故正实数 m 的最大值为 1.



7．（★★★★）已知 $\ln m-\dfrac{1}{e^m}+2m=0$，则 $me^m=$_____.

答案：1

解析：由已知的等式无法求出 m，于是考虑同构，等式中有 $\ln m+2m$，考虑凑出 $\ln m+m$ 这一典型结构，

因为 $\ln m-\dfrac{1}{e^m}+2m=0$，所以 $\ln m+m=\dfrac{1}{e^m}-m$，故 $\ln m+m=e^{-m}+(-m)$，

又变成了 $\ln x+x$ 与 e^x+x 的基本同构模型，所以 $\ln m+e^{\ln m}=e^{-m}+(-m)$ ①，

设 $f(x)=e^x+x(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=e^x+1>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，且式①即为 $f(\ln m)=f(-m)$，

从而 $\ln m=-m$，我们要求的是 me^m，所以两端取指数，化对为指，故 $e^{\ln m}=e^{-m}$，即 $m=\dfrac{1}{e^m}$，所以 $me^m=1$.

8．（2022·T8 联考·★★★★）设 a，b 都为正数，e 为自然对数的底数，若 $ae^{a+1}+b<b\ln b$，则（　　）

（A）$ab>e$　　（B）$b>e^{a+1}$　　（C）$ab<e$　　（D）$b<e^{a+1}$

答案：B

解析：先把变量 a，b 分离到两侧，$ae^{a+1}+b<b\ln b \Leftrightarrow ae^{a+1}<b(\ln b-1)\Leftrightarrow ae^{a+1}<b\ln\dfrac{b}{e}$，

此时发现，只要两端同除以 e，就可以转化为 xe^x 和 $x\ln x$ 的同构模型，

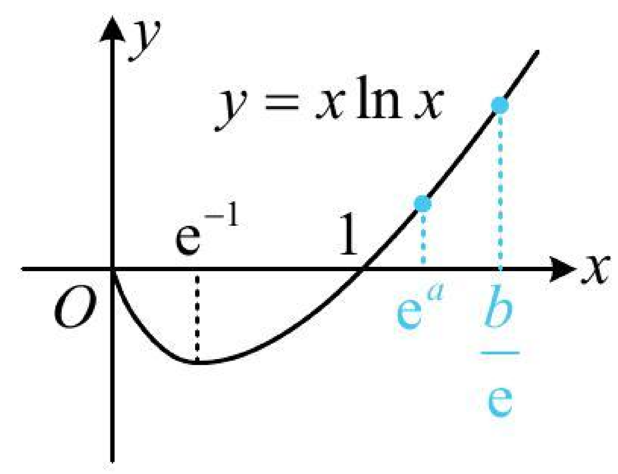
$ae^{a+1}<b\ln\dfrac{b}{e}\Leftrightarrow ae^a<\dfrac{b}{e}\ln\dfrac{b}{e}\Leftrightarrow \ln e^a\cdot e^a<\dfrac{b}{e}\ln\dfrac{b}{e}$，左右两侧同构了，可构造函数分析，

设 $f(x)=x\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=1+\ln x$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>e^{-1}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<e^{-1}$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 上↘，在 $(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 上↗，注意到当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，可作出 $f(x)$ 的草图如图，

不等式 $\ln\mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^a<\dfrac{b}{\mathrm{e}}\ln\dfrac{b}{\mathrm{e}}$ 即为 $f(\mathrm{e}^a)<f(\dfrac{b}{\mathrm{e}})$，注意到 $a>0$，所以 $\mathrm{e}^a>1$，

由图可知要使 $f(\mathrm{e}^a)<f(\dfrac{b}{\mathrm{e}})$ 成立，只能 $\mathrm{e}^a<\dfrac{b}{\mathrm{e}}$，所以 $b>\mathrm{e}^{a+1}$.



9.（2022•成都模拟•★★★★）若不等式 $\log_2 x-m\cdot 2^{mx}\le 0$ 对任意的 $x>0$ 都成立，则正实数 m 的取值范围为_____.

答案： $[\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2},+\infty)$

解析： 指、对的底数是 2，不是 e，能同构吗？其实 $x\mathrm{e}^x$ 和 $x\ln x$ 的同构方法，也适用于其它底数的情形，此处先移项把指、对分开，再观察 $\log_2 x$ 和 $m\cdot 2^{mx}$ 这两个部分，同乘 x 就能转化为 $x\log_2 x$ 和 $mx\cdot 2^{mx}$，

$\log_2 x-m\cdot 2^{mx}\le 0\Leftrightarrow \log_2 x\le m\cdot 2^{mx}\Leftrightarrow x\log_2 x\le mx\cdot 2^{mx}\Leftrightarrow 2^{\log_2 x}\cdot\log_2 x\le mx\cdot 2^{mx}$ ①，

此时左右两侧就化为了一致的结构，接下来构造函数研究单调性，

设 $f(x)=x\cdot 2^x(x\in\mathbf{R})$，则不等式①即为 $f(\log_2 x)\le f(mx)$，且 $f'(x)=2^x+x\cdot 2^x\cdot\ln 2=2^x(1+x\cdot\ln 2)$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{\ln 2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{\ln 2}$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{1}{\ln 2})$ 上↘，在 $(-\dfrac{1}{\ln 2},+\infty)$ 上↗，

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$f(0)=0$，所以 $f(x)$ 的大致图象如图 1 所示，

因为 $m>0$，$x>0$，所以 $mx>0$，故 $f(\log_2 x)\le f(mx)\Leftrightarrow \log_2 x\le mx$，

接下来可以全分离，也可以换底后画图分析，下面我们把两种方法都给出来，

法 1：将 $\log_2 x\le mx$ 全分离，求导研究最值，$\log_2 x\le mx\Leftrightarrow m\ge\dfrac{\log_2 x}{x}$，

设 $\varphi(x)=\dfrac{\log_2 x}{x}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}\cdot x-\log_2 x}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{\ln 2}-\log_2 x}{x^2}=\dfrac{\log_2\mathrm{e}-\log_2 x}{x^2}$，

所以 $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}$，$\varphi'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}$，从而 $\varphi(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上↗，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上↘，

故 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(\mathrm{e})=\dfrac{\log_2\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}$，因为 $m\ge\varphi(x)$ 恒成立，所以 $m\ge\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}$.

法 2：也可通过换底公式，化为 $\ln x$，借助切线 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ 得出参数范围，

因为 $\log_2 x=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$，所以 $\log_2 x\le mx\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{\ln 2}\le mx\Leftrightarrow \ln x\le(m\cdot\ln 2)x$，

如图 2，注意到 $y=\ln x$ 过原点的切线为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，

所以当且仅当$m\cdot\ln 2\geq\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$\ln x\leq(m\cdot\ln 2)x$恒成立，故$m\geq\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}$.

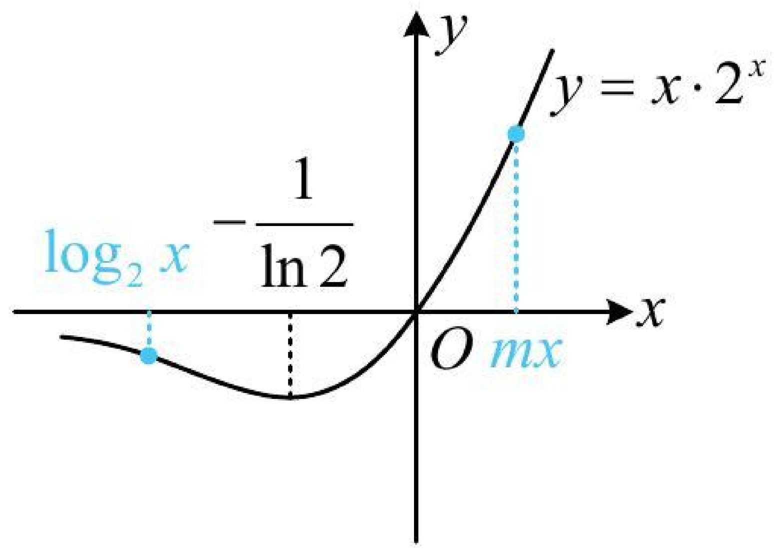


图1

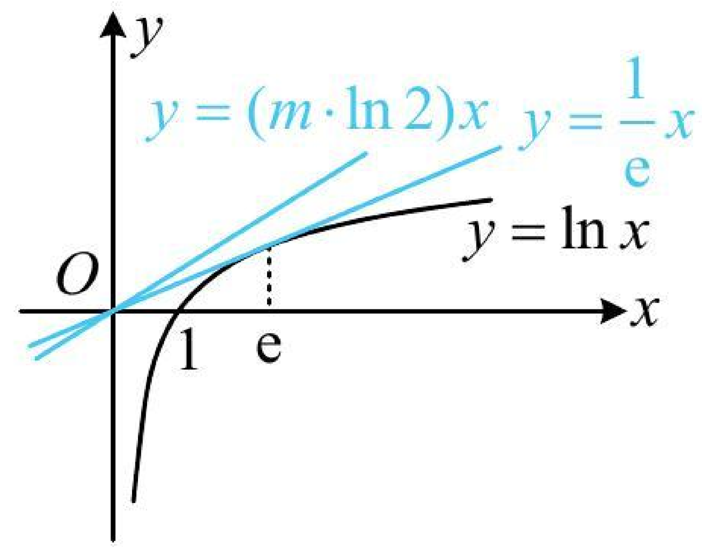


图2